Loi de conservation de la quantité de mouvement gyrocinétique*

Natalia Tronko[1†] et Alain J. Brizard[2‡]
[1] *Centre de Physique Théorique, CNRS – Aix-Marseille Université, Campus de Luminy, case 907, 13288 Marseille cedex 09, France*
[2] *Department of Chemistry and Physics, Saint Michael's College, Colchester, VT 05439, USA*

Une forme exacte de la loi de conservation de la quantité de mouvement gyrocinétique est obtenue à partir d'un principe variationel gyrocinétique dans la limite électrostatique.

1. Introduction

Le théorème de Noether joue un rôle fondamental en physique théorique, dans lequel il associe une loi de conservation exacte à toute symétrie du lagrangien. Par exemple, la loi de conservation de l'énergie est associée à la symétrie par rapport aux translations temporelles tandis que la loi de conservation de la quantité de mouvement est associée à la symétrie par rapport aux translations spatiales.

Le théorème de Noether a déjà été utilisé pour obtenir la loi de conservation exacte pour l'énergie gyrocinétique des équations Vlasov-Poisson gyrocinétiques à partir de la fonctionelle d'action gyrocinétique [1]

$$\mathcal{A} \;=\; -\sum \int d^8\mathcal{Z}\; \mathcal{F}(\mathcal{Z})\; \mathcal{H}(\mathcal{Z};\, \phi_1) \;+\; \int \frac{d^4x}{8\pi}\; \left(\epsilon^2\, |\mathbf{E}_1|^2 \;-\; |\mathbf{B}|^2\right), \tag{1}$$

où le premier terme représente l'action de Vlasov (la somme sur les espèces est représentée par $\sum$) tandis que le second terme représente l'action de Maxwell. Cette fonctionelle d'action dépend de la distribution Vlasov $\mathcal{F} \equiv F(\mathbf{z}, t)\; \delta(w - H)$ dans un espace de phase étendu à huit dimensions (qui inclut les coordonnées $\mathbf{z}$ de l'espace de phase régulier ainsi que la coordonnée d'énergie w et le temps t), dans lequel le mouvement physique s'effectue sur la surface $\mathcal{H} \equiv H(\mathbf{z}, t) - w \equiv 0$. L'action dépend également du champ électrique perturbé $\mathbf{E}_1 \equiv -\nabla\phi_1$ (le petit paramètre ϵ est défini ici comme le rapport de la vitesse de dérive $E \times B$ à la vitesse thermique) tandis que le champ magnétique d'équilibre $\mathbf{B}$ ne joue aucun rôle dynamique.

Le hamiltonien gyro-centre est défini par l'expression [2]

$$H(\mathbf{X}, p_\|, \mu, t;\, \phi_1) \;\equiv\; H_{\rm gc}(\mathbf{X}, p_\|, \mu) \;+\; \epsilon\, e\, \langle\phi_{1\rm gc}\rangle \;-\; \frac{\epsilon^2 e^2}{2\Omega}\; \left\langle \left\{ \widetilde{\Phi}_{1\rm gc},\;\; \phi_{1\rm gc} \right\}_{\rm gc} \right\rangle, \tag{2}$$

où $H_{\rm gc}(\mathbf{X}, p_\|, \mu)$ et $\{\;,\;\}_{\rm gc}$ représentent le hamiltonien centre-guide et le crochet de Poisson centre-guide [3] exprimés dans l'espace de phase gyro-centre dans lequel $\mathbf{X}$ représente la position du gyro-centre, $p_\|$ sa quantité de mouvement parallèle, et μ son moment magnétique (l'invariant adiabatique associé à l'angle de giration ζ). Le potentiel perturbé $\phi_{1\rm gc} \equiv \phi_1(\mathbf{X} + \boldsymbol{\rho}, t)$ dépend de l'angle de giration ζ, $\langle\cdots\rangle$ représente la moyenne sur l'angle de giration, et le potentiel perturbé $\widetilde{\Phi}_{1\rm gc}$, qui dépend de l'angle de giration ζ de façon explicite, est défini par l'expression $\partial\widetilde{\Phi}_{1\rm gc}/\partial\zeta \equiv \widetilde{\phi}_{1\rm gc} \equiv \phi_{1\rm gc} - \langle\phi_{1\rm gc}\rangle$. Avec ces définitions, nous pouvons écrire la dérivée fonctionnelle

$$\frac{\delta H}{\delta\phi_1(\mathbf{x}, t)} \;=\; \epsilon\, e\; \left\langle \delta^3_{\rm gc} \;-\; \epsilon\; \frac{e}{\Omega} \left\{ \widetilde{\Phi}_{1\rm gc},\; \delta^3_{\rm gc} \right\}_{\rm gc} \right\rangle \;\equiv\; \epsilon\, e\; \left\langle \mathsf{T}^{-1}_{\rm gy} \delta^3_{\rm gc} \right\rangle \tag{3}$$

où la distribution de Dirac gyro-centre $\delta^3_{\rm gc} \equiv \delta^3(\mathbf{X} + \boldsymbol{\rho} - \mathbf{x})$ est exprimée en termes de la position du gyro-centre $\mathbf{X}$ et le rayon de gyroration $\boldsymbol{\rho}$, à un point fixe $\mathbf{x}$ donné. Notons que la dépendance temporelle du hamiltonien (2) n'est reliée qu'au potentiel perturbé ϕ_1 tandis que la dépendance spatialle est reliée au potential ϕ_1 ainsi qu'au champ magnétique $\mathbf{B}$.

La variation $\delta\mathcal{A} = \int \delta\mathcal{L}\; d^4x$ de l'action gyrocinétique (1) s'écrit en terme de la variation de la densité lagrangienne

$$\delta\mathcal{L} \;\equiv\; -\,\frac{\epsilon^2}{4\pi}\; (\nabla\delta\phi_1 \cdot\, \nabla\phi_1) \;-\; \sum \int_p \left(\{\mathcal{S},\; \mathcal{F}\}_{\rm gc}\, \mathcal{H} + \epsilon\; \delta\phi_1\; \frac{\delta H}{\delta\phi_1} \right), \tag{4}$$

---

* Mots clés: théorème de Noether, théorie gyrocinétique, physique des plasmas.
† nathalie.tronko@gmail.com
‡ abrizard@smcvt.edu

où nous avons utilisé la variation vlasovienne $\delta\mathcal{F} \equiv \{\mathcal{S},\ \mathcal{F}\}_{\rm gc}$ (qui obéit à la contrainte $\int \delta\mathcal{F}\, d^8\mathcal{Z} \equiv 0$) exprimée à l'aide d'une fonction génératrice $\mathcal{S}$ d'un déplacement virtuel dans l'espace de phase. Un réarrangement des termes dans la variation (4) nous permet de la réécrire sous la forme

$$\delta\mathcal{L} \;=\; \left(\frac{1}{c}\,\frac{\partial\Lambda}{\partial t} \;+\; \nabla\cdot\mathbf{\Gamma}\right) \;-\; \sum\int_p \mathcal{S}\,\Big\{\mathcal{F},\,\mathcal{H}\Big\}_{\rm gc} \;+\; \delta\phi_1\left[\frac{\epsilon^2}{4\pi}\,\nabla\cdot\mathbf{E}_1 \;-\; \epsilon\sum e\int_p \mathcal{F}\,\left\langle \mathsf{T}_{\rm gy}^{-1}\,\delta^3_{\rm gc}\right\rangle\right], \tag{5}$$

où les composantes de la densité quadri-dimensionelle de Noether sont

$$(\Lambda,\ \mathbf{\Gamma}) \;\equiv\; \left(0,\ -\,\frac{\epsilon^2}{4\pi}\,\delta\phi_1\,\mathbf{E}_1\right) \;+\; \sum\int_p \mathcal{S}\,\mathcal{F}\left(c,\ \mathcal{F}\,\dot{\mathbf{X}}\right), \tag{6}$$

avec $\dot{\mathbf{X}} \equiv \{\mathbf{X},\ H\}_{\rm gc}$ représentant la vitesse gyro-centrique.

Le principe variationnel $\int \delta\mathcal{L}\, d^4x \equiv 0$, pour toutes variations $(\mathcal{S}, \delta\phi_1)$ qui s'annulent sur les frontières d'intégration, nous donne l'équation de Vlasov gyrocinétique étendue $\{\mathcal{F},\ \mathcal{H}\}_{\rm gc} = 0$, qui se transforme en l'équation Vlasov gyrocinétique régulière

$$\frac{\partial F}{\partial t} \;+\; \Big\{F,\ H\Big\}_{\rm gc} \;\equiv\; \frac{\partial F}{\partial t} \;+\; \dot{\mathbf{X}}\cdot\nabla F \;+\; \dot{p}_\parallel\,\frac{\partial F}{\partial p_\parallel} \;=\; 0, \tag{7}$$

après avoir effectué une intégration sur la coordonnée d'énergie w, ainsi que l'équation de Poisson gyrocinétique

$$\epsilon\,\nabla\cdot\mathbf{E}_1 \;=\; 4\pi\sum e\int \left\langle \mathsf{T}_{\rm gy}^{-1}\,\delta^3_{\rm gc}\right\rangle\, F\, d^3p. \tag{8}$$

2. Loi de conservation de la quantité du mouvement gyrocinétique

L'insertion des équations Vlasov-Poisson gyrocinétiques (7)-(8) dans la variation (5) nous donne l'équation de Noether gyrocinétique

$$\delta\mathcal{L} \;=\; \frac{1}{c}\,\frac{\partial\Lambda}{\partial t} \;+\; \nabla\cdot\mathbf{\Gamma}, \tag{9}$$

où les variations associées aux translations spatiales $\mathbf{x} \to \mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$ sont

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathcal{S} & \equiv & m\,\dot{\mathbf{X}}\cdot\delta\mathbf{x} \\ \delta\phi_1 & \equiv & -\,\delta\mathbf{x}\cdot\nabla\phi_1 \;\equiv\; \delta\mathbf{x}\cdot\mathbf{E}_1 \\ \delta\mathcal{L} & \equiv & -\,\delta\mathbf{x}\cdot\nabla\mathcal{L} \;+\; \delta\mathbf{x}\cdot\nabla\mathbf{B}\cdot\partial\mathcal{L}/\partial\mathbf{B} \end{array}\right\}. \tag{10}$$

Notons que la présence du deuxième terme dans l'expression pour $\delta\mathcal{L}$ garantit que seules les contributions associées aux champs dynamiques $\mathcal{F}$ et $\mathbf{E}_1 \equiv -\,\nabla\phi_1$ sont prises en compte. La loi de conservation de la quantité de mouvement gyrocinétique devient donc

$$\frac{\partial\mathbf{\Pi}}{\partial t} \;+\; \nabla\cdot\mathsf{T} \;=\; -\,\nabla\mathbf{B}\cdot\;\sum\int F\,\frac{\partial H}{\partial\mathbf{B}}\,d^3p \tag{11}$$

où la densité d'impulsion $\mathbf{\Pi}$ et le tenseur de pression T gyrocinétiques sont

$$\mathbf{\Pi} \;=\; \sum\int m\dot{\mathbf{X}}\,F\,d^3p, \tag{12}$$

$$\mathsf{T} \;=\; \frac{\epsilon^2}{4\pi}\left(|\mathbf{E}_1|^2\,\frac{\mathbf{I}}{2} \;-\; \mathbf{E}_1\,\mathbf{E}_1\right) \;+\; \sum\int m\,\dot{\mathbf{X}}\,\dot{\mathbf{X}}\,F\,d^3p. \tag{13}$$

Selon le théorème de Noether, la composante toroïdale de l'impulsion gyro-centre

$$\Pi_\varphi \;\equiv\; \mathbf{\Pi}\cdot\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\varphi} \;=\; \sum\int m\,\dot{\varphi}\,F\,d^3p \tag{14}$$

obéit à une loi de conservation exacte en géométrie magnétique axisymétrique (représentée en termes des coordonnées magnétiques ψ, θ, et φ, avec Jacobien $\mathcal{J}$), où la vitesse toroïdale $\dot{\varphi}$ est décomposée en termes de contributions centre-guide (indépendante de ϕ_1) et gyro-centre (proportionelle à $\mathbf{E}_1$). Cette loi de conservation, moyennée sur une surface de flux magnétique ψ, avec les définitions $\overline{(\cdots)} \equiv \mathcal{V}^{-1} \int (\cdots)\, \mathcal{J}\, d\varphi\, d\theta$ et $\mathcal{V} \equiv \int \mathcal{J}\, d\varphi\, d\theta$, s'exprime sous la forme

$$\frac{\partial \overline{\Pi}_\varphi}{\partial t} \;\equiv\; -\,\frac{1}{\mathcal{V}}\,\frac{\partial}{\partial \psi}\,\left(\mathcal{V}\,\overline{T}_{\psi\varphi}\right), \tag{15}$$

où le flux radial moyenné $\overline{T}_{\psi\varphi}$ de l'impulsion toroïdale s'exprime [4] en termes de coefficients de transport toroïdal convectif (proportionel à la vitesse toroïdale $\overline{\dot{\varphi}}$), diffusif (proportionel au gradient de la vitesse toroïdale $\partial\overline{\dot{\varphi}}/\partial\psi$), et résiduel (indépendant de $\overline{\dot{\varphi}}$ et $\partial\overline{\dot{\varphi}}/\partial\psi$). Une discussion élaborée de cette loi de conservation (15), ainsi que sa généralisation au cas de champs fluctuants électromagnétiques, sera présentée dans une autre publication [5].

3. Conclusion

Le théorème de Noether nous permets d'associer une loi de conservation exacte à toute symétrie de la densité lagrangienne, même si cette densité est obtenue à partir d'une réduction dynamique asymptotique (telle que la réduction gyro-centre). Nous remarquons que ces lois de conservation ne sont pas obtenues indirectement à partir de moments de l'équation Vlasov gyrocinétique (7) [4] mais directement à partir de l'équation de Noether (9).

Références bibliographiques

[1] A. J. Brizard, Phys. Plasmas **7**, 4816 (2000).
[2] D. H. E. Dubin, J. A. Krommes, C. Oberman, & W. W. Lee, Phys. Fluids **26**, 3524 (1983).
[3] J. R. Cary & A. J. Brizard, Rev. Mod. Phys. **81**, 693 (2009).
[4] T. S. Hahm, P. H. Diamond, O. D. Gurcan, & G. Rewoldt, Phys. Plasmas **14**, 072302 (2007).
[5] A. J. Brizard & N. Tronko, (en préparation).