L'amortissement Landau linéaire est-il relié aux trajectoires non linéaires des particules résonnantes?
Is linear Landau damping related to the non linear trajectories of the resonant particles?

Gérard Belmont[*], Thomas Chust[*], Fabrice Mottez[**], Sébastien Hess[***]
[*]*LPP, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France*
[**]*LUTH, Observatoire de Paris-Meudon, Meudon, France*
[***]*LESIA, Observatoire de Paris-Meudon, Meudon, France*

Abstract

From many demonstrations based on energy, linear Landau effect may seem to be due to non linear properties of the trajectories of a special population: the resonant particles. This idea is obviously wrong and we revisit the origin of this paradoxical result. Landau damping, since its mathematical linear treatment by Landau, more than sixty years ago, is still an active domain of research, in particular concerning the dependence of the long time evolution of the wave on the amplitude of the initial perturbation. But we show that considering the amplitude is not sufficient: the time evolution actually depends also on the shape of this initial perturbation for the electron distribution function $f_1(v, x)$, even in the very first linear stage. We investigate this dependence using numerical simulations with very low noise, which allow studying the small amplitude waves and their particle signatures. The results contradict the understanding commonly accepted for the role of the so-called resonant particles, supposed "responsible" for the damping since Dawson's calculation. This makes the theoretical interpretation of the results of general interest. We briefly re-derive the linear results and provide an explicit form of the distribution function perturbation predicted by linear theory. Thanks to it, we show that the resonant particles do not control the damping, as usually believed, simply by increasing their own kinetic energy from the electrostatic one, but more exactly by determining the energy exchanges between the electric field and the whole distribution function as the self consistent response to the initial conditions. This result allows showing how the linear stage depends on the initial condition shapes: a class of them leads to the classical Landau damping, but others (specific but still quite regular) can lead to any damping prescribed arbitrarily. This infinity of solutions may provide simple explanations for some of the results that are usually attributed to non linear effects.

Résumé

L'effet Landau, c'est à dire la propriété pour un plasma sans collision d'amortir n'importe quelle perturbation initiale, est connu depuis le travail de Lev Landau en 1946 et sa théorie linéaire est solidement établie dans cet article précurseur. Un nombre considérable de travaux lui a été consacré depuis cette date et encore aujourd'hui il s'agit d'un domaine où la recherche est active, en ce qui concerne principalement les développements non linéaires. Pourtant, la nature profonde de ce mécanisme reste incomplètement comprise. La littérature sur le sujet se décompose en deux catégories principales : 1) les articles qui calculent, comme l'a fait initialement Landau, l'évolution temporelle d'une perturbation initiale ; 2) les articles qui estiment les échanges d'énergie entre les particules et le champ électrostatique dans un mode propre supposé établi. Les articles de la première catégorie sont les plus complets mais la physique à l'oeuvre y est généralement moins mise en évidence que les techniques de calcul, qui sont délicates, avec les classiques intégrations dans le plan complexe et les déformations de contour. La valeur γ_L ainsi trouvée pour le taux d'amortissement par Landau est elle universelle? Quelles sont les hypothèses physiques nécessaires pour la trouver? La notion "d'oubli" des conditions initiales est elle toujours assurée ou dépend elle des conditions initiales? Le rôle de la vitesse résonnante est il apparent dans la forme de la perturbation $f_1(v)$? Toutes ces questions ne sont généralement pas posées dans ce type d'articles et la réponse ne peut souvent pas s'y trouver sans un effort théorique important. Les articles de la seconde catégorie, dont le précurseur est John Dawson, reposent sur des calculs a priori plus proches de l'intuition physique, mais ils sont en fat très délicats à mener correctement, si bien que la prise en compte de tous les différents termes, linéaires et non linéaires, n'y est généralement pas complète. Or, il se trouve que les calculs incomplets peuvent mener à des images -complètement ou partiellement- fausses de la physique à l'œuvre. A lire les livres classiques de Physique des Plasmas, on peut souvent être mené à croire en particulier que l'effet Landau est essentiellement associé, même dans sa phase linéaire, aux effets non linéaires des trajectoires de particules. On se souvient par exemple de certaines illustrations, dans les chapitres décrivant l'effet Landau linéaire, qui présentent le piégeage des particules dans le potentiel de l'onde, ou la formation d'un plateau quasi-linéaire dans

la fonction de distribution autour de la vitesse de résonance. Or ces effets non linéaires n'étant pas inclus dans le calcul linéaire de l'effet Landau, il est évident qu'ils ne peuvent pas être invoqués pour comprendre le mécanisme physique tel qu'il existe dans sa phase linéaire. Les calculs d'énergie présentent intrinsèquement une difficulté particulière qui explique en partie ces ambiguïtés : dans un calcul perturbatif, l'énergie est une quantité quadratique, elle impose donc de calculer des quantités du second ordre, même pour les calculs linéaires, et ceci demande de grandes précautions. Nous résumons ici deux articles que nous avons écrits dans Physics of Plasmas, le premier démontrant que l'on peut parfaitement obtenir des solutions différentes de la solution Landau, pour la propagation comme pour l'amortissement, à condition de choisir des conditions initiales adéquates. Le second reprend les calculs d'énergie et montre que, lorsqu'ils sont complets, ces calculs ne sont pas contradictoires avec l'existence de solutions "non Landau".

Keywords : collisionless damping, Landau effect, Van Kampen modes, pertubative PIC simulations
Mots-clefs : amortissement sans collision, effet Landau, modes de Van Kampen, simulations PIC perturbatives

1. Existence de solutions non Landau

Dans l'article [1], les deux résultats principaux concernant le système Vlasov-Maxwell linéaire et ses modes propres sont : 1) il est tout à fait possible d'imposer des conditions initiales telles que le système ne suive pas le comportement Landau classique, même aux temps asymptotiques (solutions dites "non Landau"); 2) ces solutions présentent en général une signature caractéristique dans la fonction de distribution perturbée à la vitesse de phase v_φ de l'onde de Langmuir qui se propage. Cet article montre que la solution de Landau est en fait la seule solution, parmi une infinité de solutions possibles (dépendant des conditions initiales), pour laquelle une telle signature caractéristique est absente : l'équation de dispersion cinétique classique de Landau découle directement de cette condition d'absence de signature à v_φ.

Il faut noter que les "modes propres" cinétiques ainsi trouvés pourraient être qualifiés plutôt de "quasi-modes" car, s'ils sont bien monochromatiques pour les quantités macroscopiques telles que la densité ou le champ électrique, ils ne le sont pas au niveau microscopique de la fonction de distribution. La "filamentation" de l'espace des phases par les effets purement balistiques (phénomène qui existe indépendamment du champ électrique) mène à une structuration de plus en plus fine en vitesse de $f(v)$ comme on le voit sur les figures 1 et 2. Ces effets sont la cause de la non-monochromaticité de la perturbation de la fonction de distribution.

Ces résultats sont démontrés dans l'article [1] grâce à une simulation numérique et interprétés par une approche théorique analytique. La simulation est de type "PIC perturbative" (delta-f), qui permet de concilier un niveau de bruit très bas, nécessaire pour étudier les ondes linéaires, et une très bonne résolution en vitesse, même dans la queue de la fonction de distribution. La théorie analytique est de type "Van Kampen", mais les quasi-modes présentés sont différents des modes dits "de Van Kampen" en cela qu'ils ne sont pas singuliers en $v = v_\varphi$.

2. Raisonnements basés sur l'énergie

L'article [1] a soulevé une question importante : comment l'existence de solutions non Landau est elle conciliable avec les arguments classiques basés sur l'énergie? Ces arguments sont toujours présentés en effet comme universels, menant à la seule valeur γ_L de Landau, indépendamment de toute condition sur la perturbation initiale. L'article [3] résout ce paradoxe apparent.

Dans la littérature, les "démonstrations" de l'effet Landau basées sur l'énergie sont de deux types : Lagrangiennes (*i.e.* suivant l'évolution de l'énergie des particules individuelles et intégrant ensuite sur leur distribution initiale), ou Euleriennes (*i.e.* considérant la distribution de particules à un endroit et un temps donné et évaluant la densité d'énergie correspondante). L'article [3] montre que ces démonstrations, quel que soit leur type, sont très généralement incomplètes, voire parfois incorrectes, dans la littérature, et qu'un calcul plus rigoureux mène en réalité, dans les deux approches, à la possibilité de solutions non Landau, exactement aux mêmes conditions que celles de l'article [1].

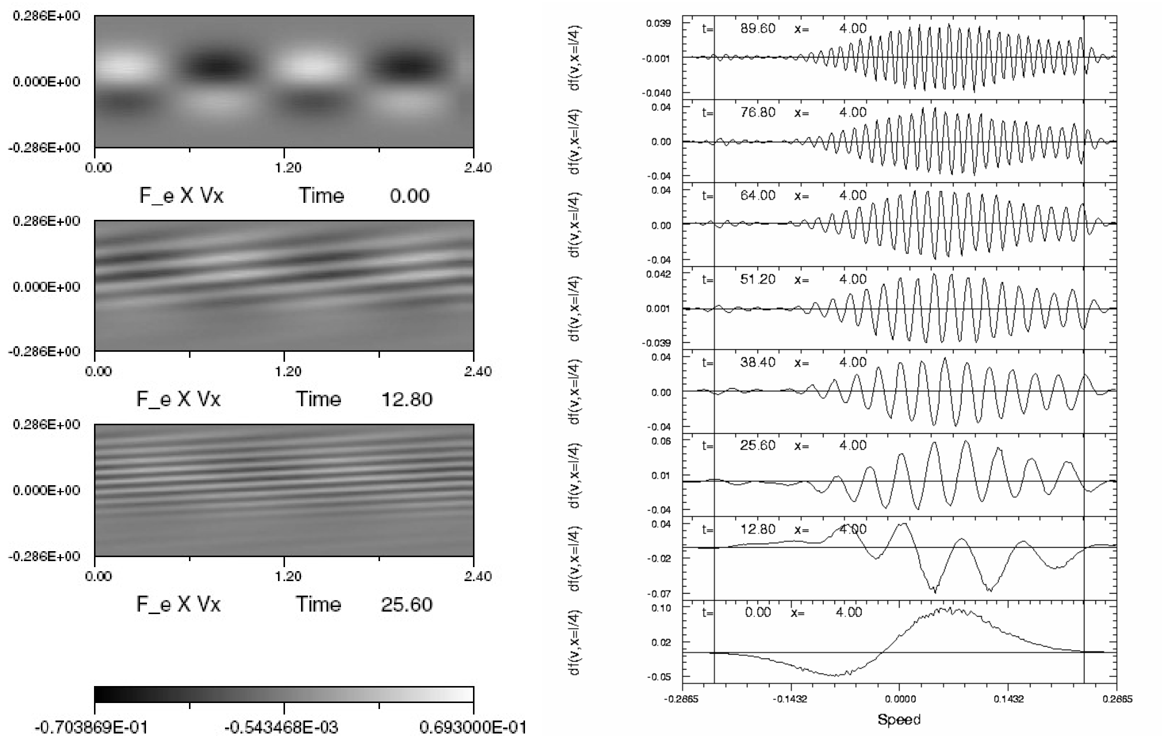

Figure 1

Conditions initiales génériques : amortissement Landau standard. Colonne de gauche : espace des phases à trois temps successifs. Colonne de droite : coupes f(v) de l'espace des phases à une position x fixée, à huit temps différents. Dans les deux représentations, on observe la filamentation croissante de l'espace des phases et le fait qu'aucune signature particulière n'existe, à aucun temps, à la vitesse de phase marquée par un trait vertical (d'après Belmont et al., 2008)

La raison principale pour laquelle la plupart des articles précédents sont incomplets provient de la difficulté à estimer l'énergie, qui est un paramètre du second ordre, pour établir des résultats qui concernent des ondes linéaires. Un développement complet au second ordre montre que deux termes contribuent au même ordre à la dissipation, correspondant à deux mécanismes différents: 1) le transport balistique des particules qui appartiennent à la perturbation initiale f_1, et 2) la perturbation due au forçage par le champ électrique des particules qui appartiennent initialement à la fonction de distribution non perturbée f_0. Les démonstrations habituelles, qui ignorent le premier terme, peuvent certes mener à des résultats corrects pour les temps asymptotiques, mais seulement à la condition que la contribution de ce terme disparaisse à long terme, c'est-à-dire si le mélange de phase mène effectivement à une telle annulation. Ceci correspond précisément à l'idée d'un "oubli" des conditions initiales, et on a vu que cet effet n'est pas universel et qu'il peut être évité par le choix de conditions initiales particulières. (Notons toutefois que le terme "oubli" n'est jamais parfaitement justifié puisque l'information, même lorsqu'elle disparaît du comportement des moments macroscopiques, reste toujours stockée au niveau microscopique).

3. Conclusion et discussion

Les résultats des articles [1] et [3] résumés ci-dessus sont susceptibles, les auteurs l'espèrent, de mener à une vision différente du phénomène d'amortissement cinétique sans collision et des mécanismes physiques qui le sous-tendent. Au lieu de considérer l'effet Landau comme inévitable et dû à des lois fondamentales de conservation de l'énergie, on peut voir qu'il ne se produit en fait que lorsque les conditions initiales vérifient certaines propriétés mathématiques qui leur permettent d'être "oubliées" asymptotiquement. Il est clair en effet que l'énergie est bien sûr toujours conservée, pour la solution Landau comme pour les solutions non Landau.

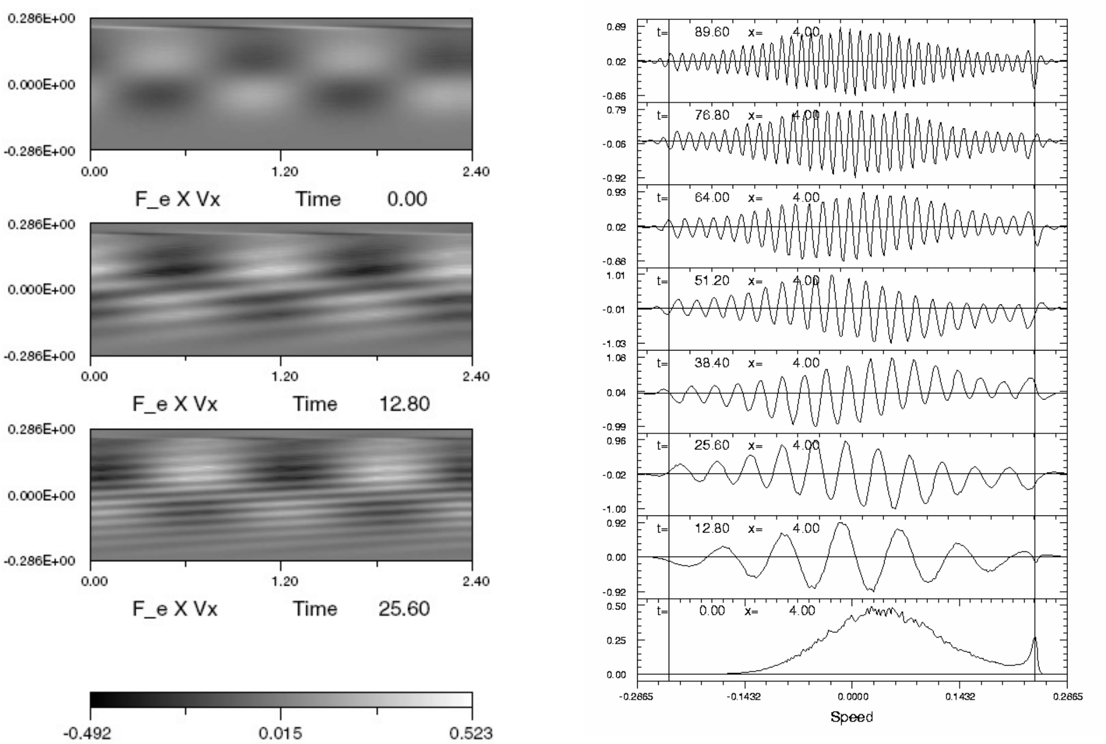

Figure 2

Conditions initiales particulières menant à un amortissement γ plus faible que la valeur γ_L de Landau (ces conditions correspondent à l'existence d'un pôle dans l'espace des vitesses complexes). Même format que la figure 1. La filamentation est comparable au cas standard, mais on observe une signature particulière à la vitesse de phase à tous les instants, depuis la condition initiale (où elle a été introduite volontairement) jusqu'aux temps les plus tardifs (d'après Belmont et al., 2008).

Grâce aux simulations numériques, on a montré que les solutions non Landau sont parfaitement réalisables, avec des fonctions de distribution qui n'ont rien de "pathologique". Il est intéressant de placer ces résultats dans le cadre du travail récent et très important de Mouhot et Villani [6] qui ont développé une théorie générale du système Vlasov-Poisson. Par un travail considérable de physique mathématique, ces auteurs ont établi sans hypothèse de linéarité et sans passer par la recherche de mode propre, le résultat que ce système converge sans condition et pour n'importe quel potentiel (incluant le potentiel de Coulomb qui nous concerne). Dans leur travail, on peut trouver que le taux de convergence est le plus petit entre trois valeurs : l'une universelle (taux d'amortissement γ_L de Landau dans le cas linéaire), et deux autres qui dépendent des largeurs d'analyticité des fonctions f_o et f_1 (distribution non perturbée et perturbation). Nos propres résultats, résumés ci-dessus, illustrent le troisième point (dans le cas linéaire) : lorsqu'il existe un pôle complexe dans la fonction $f_1(v)$, avec une partie imaginaire plus petite que la valeur classique de Landau γ_L, c'est cette partie imaginaire qui détermine le taux d'amortissement. La réalisation de cette prédiction par la simulation numérique présente également l'avantage de rendre plus directement perceptible la raison pour laquelle des conditions initiales "arbitraires" mènent très généralement au taux d'amortissement standard de Landau. Pour obtenir un taux d'amortissement différent, on se rend compte que la condition initiale doit en effet être préparée très spécialement : la forme de $f_1(v)$, toute régulière qu'elle soit, doit dépendre de la position x, et d'une façon qui est différente pour chaque vitesse v (l'existence d'un pole impose en effet des relations de phase entre les variations en x et en v). Nos résultats illustrent bien la phrase suivante de l'abstract de l'article [6]: "the damping phenomenon is re-interpreted in terms of transfers of regularity between kinetic and spatial variables, rather than exchanges of energy".

On doit souligner également que, si la forme $f_1(v)$ de la perturbation initiale peut être choisie à volonté dans une simulation numérique ou un calcul analytique, le problème se présente généralement de façon différente dans les dispositifs expérimentaux. Dans l'expérience modélisée par Bénisti et al. [2] par exemple, l'amortissement se manifeste à l'issue d'une première phase où le champ électrique augmente progressivement, ce qui mène naturellement à une "condition initiale" pour l'effet Landau qui est complètement déterminée et qui correspond à la valeur Landau standard. Néanmoins, on peut souligner aussi qu'une expérience dédiée est a priori tout à fait réalisable pour mettre en évidence au laboratoire les solutions non Landau (F. Doveil, communication privée).

Précisons aussi que la critique que nous avons émise ci-dessus concernant les démonstrations "énergétiques" ne concerne que celles qui consistent à calculer directement l'énergie électrostatique d'un côté et l'énergie cinétique de l'autre. Il existe en fait d'autres théories, basées sur le concept de "modons", et qui raisonnent sur les échanges d'énergie entre ces modons et la population de particules résonnantes (voir par exemple [4]) lorsque la séparation en vitesse est suffisamment grande. Ces études, qui font appel à un formalisme Hamiltonien qui les rend très puissantes, en particulier pour étudier les effets non linéaires, utilisent des arguments de nature différente et ne sont pas analysés dans notre article [3]. Leur aptitude à décrire les solutions non Landau ne dépend pas, en fait, de leur principe, mais de la précision avec laquelle les modons eux-mêmes sont décrits, ce qui est en amont des raisonnements censés "démontrer" l'effet Landau : ceci demande une expression de la constante diélectrique du plasma, qui nécessite au préalable de savoir trouver les solutions du système Vlasov-Maxwell. Morrison and Pfirsch [5] ont pu, par exemple, décrire les modes de Van Kampen modes de cette façon.

L'idée simple, et que nous espérons importante, que l'on peut retenir de notre travail sur l'effet Landau peut se résumer comme suit : non seulement l'effet Landau se produit *malgré* l'absence de signature à la vitesse de phase sur la fonction de distribution perturbée, mais il se produit *à cause* de cette absence. La solution Landau est la seule, parmi une infinité d'autres solutions, qui ne présente pas une telle signature. C'est en ce sens inhabituel que les particules résonnantes jouent un rôle dans l'amortissement, et non pas, comme on le croit généralement, à cause de l'énergie que ces particules devraient nécessairement acquérir aux dépens de l'énergie électrostatique.

References bibliographiques

Les quelques références données qui suivent ne concernent que la discussion du dernier paragraphe ci-dessus. La littérature concernant l'effet Landau est immense et les articles les plus importants peuvent être trouvés dans les références bibliographiques des articles cités

[1] Belmont, G., F. Mottez, T. Chust, and S. Hess, Existence of non-Landau solutions for Langmuir waves, Physics of Plasmas, 15, 052310, 2008

[2] Benisti, D., D. Strozzi, and L. Gremillet, Breakdown of electrostatic predictions for the non linear dispersion relation of a stimulated Raman scattering driven plasma wave, Physics of Plasmas, 15, 030701, 2008

[3] Chust, T., G. Belmont, F. Mottez, and S. Hess, Landau and non-Landau damping, Physics of the dissipation, Physics of Plasmas, 16, 092104 (2009)]

[4] Elskens, Y, and D. Escande, Microscopic dynamics of Plasmas and chaos, Institute of Physics, Bristol, 2003

[5] Morrison, P.J., and D. Pfirsch, Dielectric energy versus plasma energy, and Hamiltonian action-angle variables for the Vlasov equation, Physics of Fluids B, 4(10), 3038, 1992

[6] Mouhot, C., and C. Villani, On Landau Damping, available online at http ://arxiv.org/abs/0904.2760. Preprint, 2009