Utilisation du Chaos Polynomial dans le cadre d'un problème d'Homogénéisation.

Use of Polynomial Chaos for a Homogenization Problem

Pierric Kersaudy [1,2,3], Shermila Mostarshedi [2], Odile Picon [2], Bruno Sudret [4], Joe Wiart [1,3]

[1] Orange Labs, France
[2] Université Paris-Est, Laboratoire ESYCOM, France
[3] Whist Lab, France
[4] ETH Zürich, Suisse

Mots clés : Homogénéisation, Variabilité, Chaos Polynomial, Modélisation

Résumé

La prédiction des niveaux de champs électromagnétiques dans un environnement urbain complexe nécessite la prise en compte de la variabilité des paramètres architecturaux. L'utilisation d'un outil de prévision du champ au voisinage d'un bâtiment prenant en compte ces variabilités permet de simuler différentes configurations. L'influence de la variabilité des paramètres architecturaux sur le champ réfléchi a été étudiée par des méthodes de Monte Carlo. L'application de cette méthode nécessitant un temps de calcul non négligeable pour obtenir la distribution du champ réfléchi, une méthode de modélisation statistique appelée Chaos Polynomial a été utilisée pour modéliser la réponse du champ réfléchi en fonction des paramètres d'entrée. Cette méthode a été appliquée sur des données simulées à une distance de 100 mètres du bâtiment. Le Chaos Polynomial se montre efficace à modéliser la distribution du champ réfléchi et une forte dépendance linéaire aux paramètres a été remarquée.

Introduction.

Les communications sans fil, en particulier les réseaux de téléphonie mobile, ont connu une grande expansion à travers le monde. Ces réseaux sont très denses dans les zones urbaines et la distribution du champ électromagnétique est fortement dépendante de la structures de ville : la densité, la forme et la nature des bâtiments. Il est alors essentiel de disposer d'outils prédictifs pour évaluer le plus précisément possible la distribution des champs électromagnétiques afin de permettre la mise en œuvre optimisée des stations de base. L'optimisation concerne d'une part la puissance consommée et d'autre part la puissance rayonnée pour des questions d'exposition humaine. La prédiction des niveaux de champs électromagnétiques dans un environnement complexe est réaliste lorsqu'elle est présentée avec une quantité acceptable d'incertitude. Les modèles statistiques pour la propagation des ondes radio dans un environnement urbain ont été utilisés depuis longtemps. Cependant les simulateurs spécifiques au site, qui sont fréquemment utilisés dans ce domaine, n'acceptent pas de paramètres variables pour les détails architecturaux et ne signalent que rarement des informations supplémentaires concernant l'incertitude des résultats. Alors que les sources d'incertitude sur le niveau du champ sont abondantes en milieu urbain, dans cette étude, elles sont limitées à celles liées aux paramètres de la façade des bâtiments.
Nous avons à disposition un outil de prévision du champ au voisinage d'un bâtiment qui prend en compte la description de la façade et emploie une méthode de calcul basée sur les fonctions de Green. La méthode est en mesure d'estimer, avec une bonne précision, les champs électromagnétiques réfléchis dans différentes zones de diffraction d'un bâtiment. L'étude de l'influence de la variabilité des paramètres d'entrée sur le champ réfléchi peut être envisagée avec une méthode de perturbation ou par des simulations Monte Carlo. D'après notre expérience, la première ne donne pas satisfaction pour les zones du champ proche du bâtiment et la seconde devient rapidement couteuse en temps de calcul [1]. Une autre solution serait alors de modéliser l'évolution du champ électrique réfléchi par une surface de réponse générée grâce à une expansion polynomiale baptisée Chaos Polynomial. Le principe est de considérer la sortie et les paramètres d'entrée comme des variables aléatoires. On construit alors cette surface de réponse dans l'espace probabiliste associé pour modéliser l'évolution de la sortie en fonction des paramètres d'entrée et de déduire ainsi la distribution de la sortie.
Dans la partie 2, on introduit les aspects théoriques du Chaos Polynomial et de sa mise en œuvre. La partie 3 présente les résultats obtenus par l'application du Chaos aux données de [1].

1. Modélisation de la réponse par le Chaos Polynomial

L'objectif du Chaos Polynomial (CP) est de modéliser la réponse d'une variable aléatoire de sortie en fonction de variables aléatoires d'entrée :

$$Y = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^m}^{\infty} a_\alpha \psi_{\boldsymbol{\alpha}} (\boldsymbol{X})$$

Où Y est la variable aléatoire décrivant la sortie (le champ réfléchi par le bâtiment), $\boldsymbol{X} = \{x_1 \dots x_m\}$ sont les variables aléatoires d'entrée (v.a.e.), les $\psi_{\boldsymbol{\alpha}}$ des polynômes multivariés constituant une base de l'espace probabiliste associé aux variables aléatoires d'entrée (pour des v.a.e. ayant une distribution uniforme on utilisera des polynômes de Legendre) et les $a_{\boldsymbol{\alpha}}$ des coefficients réels à évaluer. En pratique, pour estimer les coefficients $a_{\boldsymbol{\alpha}}$, on a deux solutions. Une première est de procéder par « projection » : on projette l'expansion sur le sous espace formé par le polynôme associé au coefficient que l'on veut estimer (les polynômes sont orthogonaux entre eux), ce qui semble élégant mais est en réalité très couteux en terme de calculs. Une deuxième solution est de procéder par « régression » : on tronque l'expansion selon l'expression $|\boldsymbol{\alpha}| \leq p$ pour les indices $\boldsymbol{\alpha}$ (on appelle cette troncature un Chaos « plein »). On peut aussi tronquer l'expansion suivant une norme hyperbolique : $\|\boldsymbol{\alpha}\|_q = \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^q\right)^{1/q}$ ce qui permet de favoriser les effets principaux et les interactions d'ordre faible. On appellera cette troncature le chaos « hyperbolique ». On estime ensuite les coefficients a_α des polynômes par régression sur la variable de sortie. Cette approche par régression, beaucoup moins couteuse, sera celle que l'on utilisera ici [2]. Ne pouvant pas réellement apprécier l'impact de la troncature, la régression nécessite alors un plan d'expérience itératif dirigé par l'évaluation de la qualité du modèle. On utilise donc la validation croisée *leave-one-out* pour estimer la performance du modèle obtenu et la troncature ayant la meilleure capacité de généralisation. Cette méthode donne un coefficient de détermination Q^2 représentatif de la capacité de généralisation du modèle obtenu ([2] pour plus de détails). Plus la valeur de Q^2 sera proche de 1, plus la capacité de généralisation du modèle généré sera grande.

2. Application à l'évaluation du champ réfléchi

On applique maintenant cette méthode de modélisation à notre exemple. La variable aléatoire de sortie est le champ réfléchi par l'immeuble. Les variables d'entrée sont les permittivités du béton et du verre, la largeur et la hauteur des fenêtres et l'écartement entre elles et vis-à-vis des bords du. Il y a alors un total de 8 variables d'entrée qui sont les permittivités du béton et du verre, les largeurs hauteurs des fenêtres et l'écartement entre elle et vis-à-vis des bords du bâtiment (figure 1). La valeur du champ réfléchi est aussi fonction de la distance au bâtiment comme le montre la figure 2. Pour notre étude on se place dans la zone de Rayleigh à distance fixée : 100 mètres. Tous les calculs sont effectués en incidence et observation normales au bâtiment.

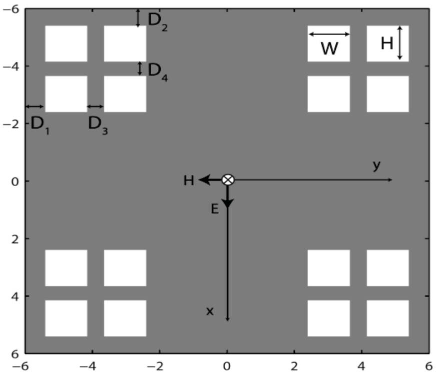

Figure 1. Façade générique d'un bâtiment béton-verre présentée pour la valeur moyenne des paramètres d'entrée [1]

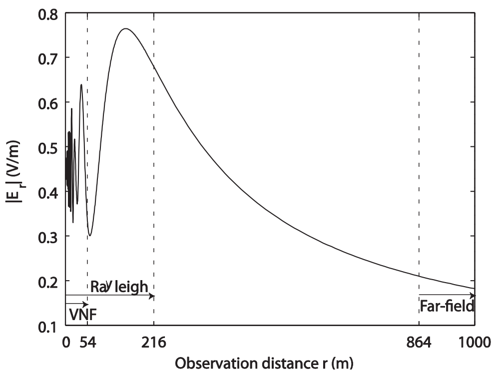

Figure 2. Amplitude du champ électrique réfléchi en fonction de la distance d'observation de la façade [1]

7000 simulations de Monte Carlo ont été réalisées à l'aide de l'outil de prévision de champ dans le but d'avoir une distribution du champ réfléchi « de référence » et de comparer les performances du chaos avec cette référence. Dans un premier temps, on applique un chaos « plein » sur des plans latin hypercube (LHS) de 100, 200, 300 et 1000 points. On effectue ensuite 100000 simulations de Monte Carlo à partir des modèles créés et on calcule les différentes distributions « modélisées ». Les résultats sont présentés sur la figure 3.

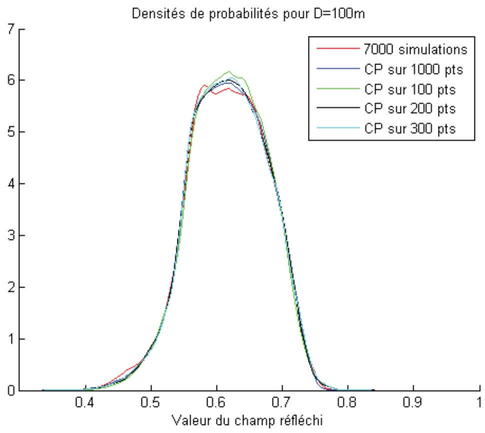

Figure 3. Densites de probabilités du champ réfléchi calculées avec différentes méthodes

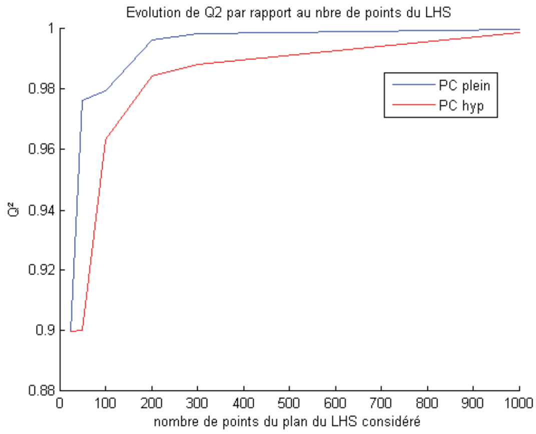

Figure 4. Evolution de Q² par rapport au nombre de points du LHS

On voit sur la figure 3 que les densités de probabilités obtenues sont quasi identiques à celle obtenue par les 7000 simulations de référence. On obtient de très bons résultats même avec un chaos polynomial réalisé à partir d'un plan d'expérience LHS de 100 points. Cela montre que l'on n'a pas besoin de polynômes d'ordre élevé pour modéliser la réponse du champ aux variables d'entrées (en effet, moins, on a de points dans le plan d'expérience, plus l'ordre de troncature *p* sera faible). Des modèles ont ensuite été réalisés en diminuant encore le nombre de points des LHS et en appliquant à la fois un chaos « plein » et un chaos « hyperbolique ». On regarde alors la capacité de généralisation des différents modèles avec le coefficient de détermination Q^2. Les résultats sont présentés sur la figure 4. On remarque que l'on obtient un Q^2 élevé (0.9) pour un nombre de points égal à 20. Avec si peu de points, l'approximation par chaos polynomial ne comporte que des polynômes d'ordre 1 univariés. Cela montre une dépendance fortement linéaire du champ réfléchi à 100 mètres par rapport aux variables d'entrées. On remarque ensuite que le chaos « plein » obtient toujours de meilleures performances que le chaos « hyperbolique » ce qui montre une importance des termes d'interactions par rapport aux termes d'effets principaux d'ordre plus élevé. Il est important de noter que la variation du champ réfléchi en fonction des paramètres d'entrée dépend fortement de la distance d'observation du bâtiment. Dans cette étude la distance de 100 m correspond à une zone « calme » pour le champ électrique. Le nombre minimum de points requis doit donc être vérifié pour la zone du champ proche du bâtiment.

Conclusion

La méthode du Chaos Polynomial a été appliquée pour modéliser la réponse du champ réfléchi par un bâtiment en fonction de paramètres d'entrée aléatoires. Une dépendance linéaire aux paramètres a été remarquée pour une distance au bâtiment de 100m. D'autres distances devront être étudiées, afin d'aboutir à la connaissance de la distribution en fonction de la distance et ainsi obtenir l'évolution des quantiles élevés en fonction de la distance. Ceci sera permis par l'application successive de la méthode du CP pour plusieurs distances sur un nombre réduit de points, ce qui représente un gain de temps de calcul important par rapport aux simulations de Monte Carlo.

Références bibliographiques

[1] S. Mostarshedi, B. Sudret, E. Richalot, J. Wiart and O. Picon, "Multivariate uncertainty analysis of scattered electric field from building facades in urban environment," AES, 16-19 April 2012, Paris.

[2] Blatman, Géraud, and Bruno Sudret. "An adaptative algorithm to build up sparse polynomial chaos expansion for stochastic finite element analysis." *Probabilistic Engineering Mechanics* 25, no. 2 (2010): 183-197.